

Varianta 049

Subiectul I

- a) $AB = 4\sqrt{5}$.
- b) $\cos^2 2007 + \sin^2 2007 = 1$.
- c) $\bar{z} = 2 - i$.
- d) $l = 2\sqrt{10}$.
- e) $a = 2, b = -9$.
- f) $\frac{15}{2}$

Subiectul II

1.

- a) Aplicând algoritmul împărțirii polinoamelor obținem câtul $X^2 - X + 1$ și restul -1 .
- b) Avem în total 3 funcții.
- c) $x = 2$.
- d) $S_{11} = 561$.
- e) $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.

- a) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}, \forall x \in \mathbf{R}^*$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$.
- c) $x = 1$ punct de minim local.
- d) Dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .
- e) $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^3 + 5}{3}$.

Subiectul III

- a) $x_1 = -5, x_2 = 3$.
- b) $\det(A) = -15$.
- c) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.
- d) $S = \{(0, 0)\}$.
- e) $A^2 + 2A - 15I_2 = O_2$.

f) $A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

g) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Fie $P(n)$ propoziția $(A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*.$

Avem $P(1)$ este adevărată.

Presupunem adevărată propoziția pentru $n = k, P(k): (A + B)^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Vom arăta că $(A + B)^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$(A + B)^{k+1} = (A + B)^k \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci în baza inducție matematice avem că $(A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*.$

Subiectul IV

a) $a_1 = f(1) = \frac{7}{8}.$

b) $a_n = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

d) $f'(x) = \frac{-3x^2}{x^6} + \frac{3(x+1)^2}{(x+1)^6} = -\frac{3}{x^4} + \frac{3}{(x+1)^4}, \forall x \in (0, \infty).$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .

f) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^{-3} - (x+1)^{-3}) dx = \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right) \Big|_1^2 = \frac{11}{36}.$

g) Din punctul f) avem $\int_1^n f(x) dx = \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} \right) \Big|_1^n = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \frac{3}{8}.$ Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\int_1^n f(x) dx - \frac{3}{8} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \right) = -1.$$